

ダイヤル数の作り方

—「関西ぱずる会 News」111号・112号から抜粋し再編集—

ダイヤル数とは

整数の末尾の何桁かがそのまま先頭に移動していた整数を、元の数の「ダイヤル数」(または巡回数)という。なお、狭い意味では、移動してできた整数が元の整数の整数倍になる場合に限る。

—『数学パズル辞典【改訂版】』(上野富美夫著、東京堂出版、2016)より

本稿では、狭義のダイヤル数を扱う。最初に簡単な例を挙げる。

$1/7=0.142857\cdots$ であり、循環節 142857 は末尾の何桁を動かしても元の数の整数倍になる。

$$(142857 \times 1 = 142857)$$

$$142857 \times 2 = 285714$$

$$142857 \times 3 = 428571$$

$$142857 \times 4 = 571428$$

$$142857 \times 5 = 714285$$

$$142857 \times 6 = 857142 \quad \text{下線部は移動した数字を表す。ちなみに } 142857 \times 7 = 999999 \text{ である。}$$

6桁の数字で1桁目を先頭に移すと元の数の5倍となるのは上記のように142857である。

ちなみに6桁の数字で1桁目を先頭に移すと元の数の4倍となるのは次の6通りである。

102564, 128205, 153846, 179487, 205128, 230769

さて、421052631578947368 という28桁の数字がある。この数字は2倍すると842105263157894736となり、元の数字の最小桁の8を先頭に移動したものとなる。この数字はどうやって得られたのだろうか。

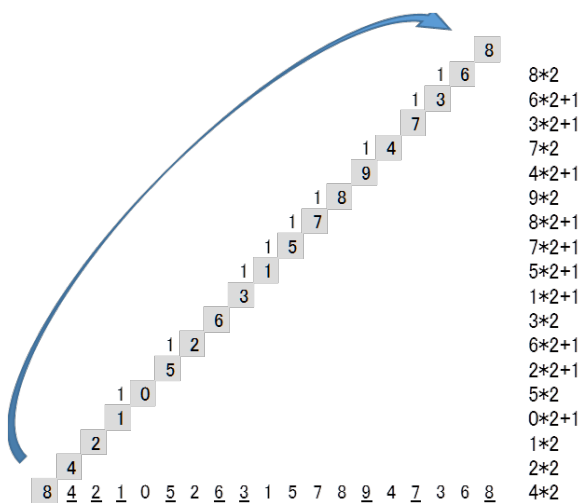


図 1

乗じる数を2、スタートする数を8とし、 2×8 から始めて図1のように1段ずつ計算を行う。図の一番右は、それぞれの段の数字がどのように得られたかの式である。たとえば4段目は3段目の網掛けの3を2倍し同じく3段目の1を足して7としている。

斜めに伸びる網掛けした数字に注目して、スタートした数字が出るまでこの手順を繰り返す。7段目で8が出るが、その1桁上には1があるので、ここでは止めずさらに進め19段目で8が出たところで止める。これで元に戻った。最後に網掛けした数字を、そのまま下ろして421052631578947368 が得られる。

表 1

0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1
1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2
1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3
2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4
2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5
3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6
3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7
4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8
4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9

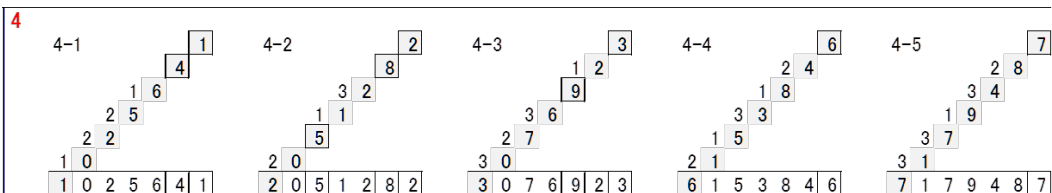
図1の19段目で得られたダイヤル数の下線を引いた1～9は1桁下の数字がいずれも4以下であり、これらの数字が1桁目にくるように循環させた9つの数字もダイヤル数となる(表1参照)。つまり、これらの数字は、いずれも2倍すると1桁目を先頭に移動させた数字になる。ただし一番目の数字は最上桁に0があるものとみなす($05263578947368421 \times 2 = 10526357894736842$)。

ダイヤル数の繰り返しもまたダイヤル数となる。たとえば 421052631578947368 を二回繰り返す 421052631578947368421052631578947368 もまたダイヤル数である。

上記はスタートする数(以下、初期値)が8、乗じる数(以下、増分)が2だったが、他の数の場合はどうなるだろう。

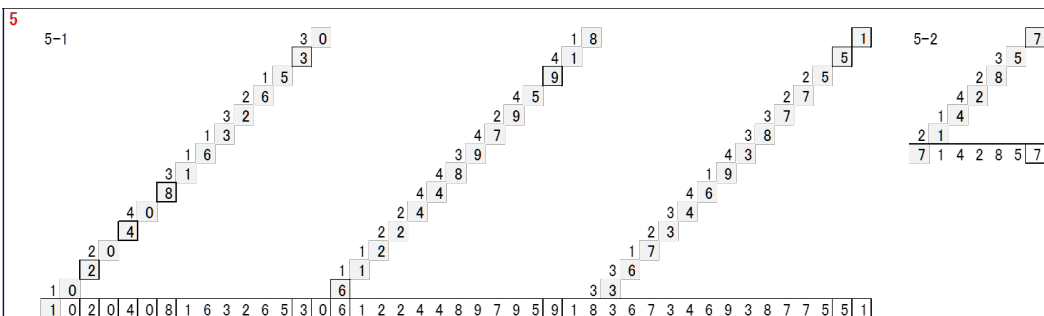
初期値(1～9)および増分(2～9)を変え同様の計算を行った。計算の過程をそのまま書くと縦に長くなる場合は折り畳み、上記の「下線を引く」の代わりに四角で囲んだ。代表的な場合を以下に示す。

1) 5つのグループに分かれる増分4の場合



初期値1で始め1に戻った時に4しか囲めなかったので(4-1)、初期値2で再度実施(4-2)、のように四角で囲まれた1から9が全部揃うまで繰り返す。

2) 初期値7だけが特異的な増分5の場合



初期値1、増分5だと左(5-1)のように四角で囲まれた7が出てこないまま計算終了となる。そこで改めて初期値7で実施すると右(5-2)のようにすぐ自己完結してしまう。従って初期値7では6桁のダイヤル数となるが、それ以外の初期値では42桁のダイヤル数となる。